MAT206 DİFERANSİYEL DENKLEMLER-II FİNAL SORULARI ve CEVAPLARI

A GRUBU

24.06.2021

1- $y''-2y'=0$ denkleminin $y(0)=0,\ y'(0)=2$ koşullarını sağlayan çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=e^{2x}-e^{x}$

B) $y=e^{2x}-1$

C) $y=e^{2x}$

D) $y=2e^{2x}-2$

E) $y=1-e^{x}$

Cevap B- $\lambda^2-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0,\ \lambda=2 \Rightarrow$ $y=y_h=c_1 1+c_2e^{2x}$ genel çözümdür. Başlangıç koşulları kullanılırsa $c_1=-1,\ c_2=1 \Rightarrow y=e^{2x}-1$ istenen özel çözümdür.

2- $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{-x}+c_5e^{2x}+2e^{x}$ genel çözümüne karşılık gelen diferansiyel denklem için aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) Değişken katsayılı denklemdir

B) $y^{(5)}-y^{(4)}-2y'''=0$ homojen kısmıdır

C) Homojen denklem değildir

D) $2e^{x}$ özel çözümüdür

E) 5. mertebeden denklemdir

Cevap A- 5 keyfi sabit olduğundan 5. mertebeden denklem olmalı, $\{1,x,x^2\}$ 0 ın 3 katlı kök olmasından gelen çözümler yani λ^3 çarpan, -1 kök olduğundan $\lambda+1$ çarpan, 2 kök olduğundan $\lambda-2$ çarpan o halde

$$\lambda^3(\lambda+1)(\lambda-2)=0 \Rightarrow \lambda^3(\lambda^2-\lambda-2)=0 \Rightarrow \lambda^5-\lambda^4-2\lambda^3=0 \Rightarrow y^{(5)}-y^{(4)}-2y'''=0$$

bulunur. Bu homojen kısım olup sabit katsayılıdır. $y=\underbrace{c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{-x}+c_5e^{2x}}_{y_h}+\underbrace{2e^{x}}_{y_ö}$ şeklindedir.

3- $T=\{e^{-x}\cos 3x,\ e^{-x}\sin 3x,\ x,\ 1\}$ temel çözüm kümesi verilsin. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

I. $\lambda=0$ ve $\lambda=1$ karakteristik polinomun köklerindendir

II. 5. mertebeden bir denklemin temel çözüm kümesidir

III. 4. mertebeden bir denklemin temel çözüm kümesidir

IV. $W(e^{-x}\cos 3x,\ e^{-x}\sin 3x,\ x,\ 1)\neq 0$ dır

A) I-III

B) I-III-IV

C) III-IV

D) II-III-IV

E) II-IV

Cevap C- $\lambda=-1+3i \quad ve \quad \lambda=-1-3i \; =0 \Rightarrow \lambda^2+2\lambda+10=0$ çarpanlardan biri, $(x,1)$ çözümlerinde $\lambda^2=0$ diğer çarpan olup karakteristik polinom $\lambda^2\left(\lambda^2+2\lambda+10\right)=0 \Rightarrow \lambda^4+2\lambda^3+10\lambda^2=0$ olup denklem $y^{(4)}+2y'''+10y''=0$ 4. mertebedendir. Temel çözüm kümesindeki fonksiyonlar sürekli türevlenebilir olup lineer bağımsız oldukları için $W(x)\neq 0$ dır.

4- $xy''+y'=x^2$ denklemi için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

I. Genel çözümü $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\dfrac{x^3}{9}$ formundadır

II. $y'=u, \quad (u=u(x))$ dönüşümü ile mertebesi düşürülebilir

III. $y_ö=x^2$ özel çözümüdür

IV. Cauchy Euler denklemi yapılabilir

A) I-II-III

B) II-III-IV

C) I-II

D) II-IV

E) I-II-IV

Cevap E- Denklem 2. mertebeden olduğu için iki lineer bağımsız çözümü olmalı, homojen olmayan denklem olduğu için de özel çözümü olmalıdır. $y_ö=\dfrac{x^3}{9} için\, y_ö'=\dfrac{x^2}{3},\; y_ö''=\dfrac{2x}{3}$ olup denklemde yazılırsa $x^2=x^2$ sağlanır. $y'=u \;\Rightarrow y''=u'$ olup denklemde yazılırsalar $xu'+u=x^2$ 1. mertebeden denklemi elde edilir. Verilen denklemin her iki tarafı x ile çarpılırsa Cauchy Euler denklemi elde edilir.

5- $2x^2y''-xy'+y=0$ denklemi için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

I. $x_0=0$ adi noktadır

II. İndisel denklemin kökleri $r_1=2,\; r_2=1$ dır

III. $y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\frac{1}{2}}$ bir seri çözümüdür

IV. $y_2(x)=x$ bir çözümüdür

A) I-III-IV

B) I-II

C) I-III

D) III-IV

E) II-IV

Cevap D- Denklem düzenlenirse $p_1(x)=\frac{-1}{2x},\ p_2(x)=\frac{1}{2x^2}$ katsayı fonksiyonları için 0 noktasında sürekli olmadığı için bu nokta adi nokta olmayıp tekil noktadır.

$p_0=\lim_{x\to 0} xp_1(x)=-1/2,\ q_0=\lim_{x\to 0} x^2 p_2(x)=1/2$ sonlu limitleri olduğu için $x_0=0$ düzgün tekil nokta olup $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ Frobenius seri çözümü vardır. İndisel denklem

$r(r-1)+p_0 r+q_0=0 \Rightarrow r(r-1)-\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow 2r^2-3r+1=0 \Rightarrow r_1=1, r_2=1/2$ köklerine sahip olur.

Buna göre çözümler $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$ *veya* $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{1}{2}}$ formlarındadır.

$y=x \Rightarrow y'=1,\ y''=0 \Rightarrow 0-x.1+x=0$ sağlandığı için çözümdür.

6- $\{e^{-x},-e^{-x},e^{2x}\}$ fonksiyonlarının Wronskian değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0

B) e

C) -e

D) 1

E) 2

Cevap A- Lineer bağımlı fonksiyonlar (aynı veya birbirinin katı olan fonksiyonlar) için $W(x)=0$ olur.

7- $y'''-2y''=3e^{2x}$ denkleminin $y_ö$ özel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x-e^{2x}$

B) $\frac{3}{4}xe^{2x}$

C) $3e^{2x}$

D) $\frac{3}{2}e^{2x}$

E) $\frac{1}{4}xe^{2x}$

Cevap B - Ters operatör yöntemi ile

$y_ö=\frac{1}{D^3-2D^2}\left(3e^{2x}\right)=3\frac{1}{D^2(D-2)}e^{2x}=3\frac{1}{2^2(D-2)}e^{2x}=\frac{3}{4}e^{2x}\frac{1}{D}1=\frac{3}{4}e^{2x}x$ bulunur.

8- $y''+\frac{1}{x}y'=\frac{1}{x}$ denklemi için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $y_{ö} = x$ özel çözümdür

B) $x = e^t$ dönüşümü ile sabit katsayılı denkleme indirgenir

C) $y_1 = 2x$ homojen kısmın çözümlerinden biridir

D) $y = c_1 + c_2 \ln x + x$ genel çözümdür

E) Uygun $u = u(x)$ dönüşümü ile $u' = \frac{1}{x}(1-u)$ denklemi elde edilir

Cevap C- $y' = u \Rightarrow y'' = u'$ olup denklem $u' + \frac{1}{x}u = \frac{1}{x} \Rightarrow u' = \frac{1}{x}(1-u)$ değişkenlerine ayrılabilir denklem elde edilir. Bunun çözümünden $\frac{du}{1-u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\ln(1-u) = \ln x + \ln c_1 \Rightarrow u = 1 - \frac{1}{c_1 x}$ bulunur. $y' = u$ olduğundan buradan bir kez integral alınırsa $y = x - \frac{1}{c_1}\ln x + c_2 \Rightarrow y = a + b\ln x + x$ genel çözüm formudur. Buna göre $y_1 = 1, y_2 = \ln x$ *ve* $y_{ö} = x$ şeklindedir. Denklem x^2 ile çarpılırsa Cauchy Euler denklemi olup $x = e^t$ dönüşümü ile sabit katsayılı denkleme indirgenir.

Doç. Dr. Fatma HIRA

MAT206 DİFERANSİYEL DENKLEMLER-II FİNAL SORULARI ve CEVAPLARI

B GRUBU

24.06.2021

1- $y''-3y'=0$ denkleminin $y(0)=0,\ y'(0)=-3$ koşullarını sağlayan çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=e^{3x}-e^{x}$

B) $y=e^{x}-1$

C) $y=1-e^{3x}$

D) $y=-e^{3x}$

E) $y=3e^{3x}-3$

Cevap C- $\lambda^2-3\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0,\ \lambda=3 \Rightarrow$ $y=y_h=c_1 1+c_2e^{3x}$ genel çözümdür. Başlangıç koşulları kullanılırsa $c_1=1,\ c_2=-1 \Rightarrow y=1-e^{3x}$ istenen özel çözümdür.

2- $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{x}+c_5e^{-3x}+3e^{2x}$ genel çözümüne karşılık gelen diferansiyel denklem için aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) Sabit katsayılı denklemdir

B) Homojen denklemdir

C) 5. mertebeden denklemdir

D) $3e^{2x}$ özel çözümüdür

E) $y^{(5)}+2y^{(4)}-3y'''=0$ homojen kısmıdır

Cevap B- 5 keyfi sabit olduğundan 5. mertebeden denklem olmalı, $\{1,x,x^2\}$ 0 ın 3 katlı kök olmasından gelen çözümler yani λ^3 çarpan, 1 kök olduğundan $\lambda-1$ çarpan, -3 kök olduğundan $\lambda+3$ çarpan o halde

$$\lambda^3(\lambda-1)(\lambda+3)=0 \Rightarrow \lambda^5+2\lambda^4-3\lambda^3=0 \Rightarrow y^{(5)}+2y^{(4)}-3y'''=0$$

bulunur. Bu homojen kısım olup sabit katsayılıdır. $y=\underbrace{c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{x}+c_5e^{-3x}}_{y_h}+\underbrace{3e^{2x}}_{y_ö}$ şeklindedir.

3- $T=\{e^{-x}\cos 2x,\ e^{-x}\sin 2x,\ 1,\ x\}$ temel çözüm kümesi verilsin. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

I. $\lambda=0$ ve $\lambda=1$ karakteristik polinomun köklerindendir

II. 4. mertebeden bir denklemin temel çözüm kümesidir

III. $W(e^{-x}\cos 2x,\ e^{-x}\sin 2x,\ 1,x)\neq 0$ dır

IV. 3. mertebeden bir denklemin temel çözüm kümesidir

A) III-IV

B) I-II-III

C) II-III-IV

D) I-II

E) II-III

Cevap E- $\lambda=-1+2i \quad ve \ \lambda=-1-2i \ =0 \Rightarrow \lambda^2+2\lambda+5=0$ çarpanlardan biri, $(x,1)$ çözümlerinde $\lambda^2=0$ diğer çarpan olup karakteristik polinom $\lambda^2\left(\lambda^2+2\lambda+5\right)=0 \Rightarrow \lambda^4+2\lambda^3+5\lambda^2=0$ olup denklem $y^{(4)}+2y'''+5y''=0$ 4. mertebedendir. Temel çözüm kümesindeki fonksiyonlar sürekli türevlenebilir olup lineer bağımsız oldukları için $W(x)\neq 0$ dır.

4- $xy''-y'=x^2$ denklemi için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

I. Genel çözümü $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\dfrac{x^3}{3}$ formundadır

II. $x=e^t$ dönüşümü ile sabit katsayılı denkleme indirgenir

III. $y'=u, \ (u=u(x))$ dönüşümü ile mertebesi düşürülebilir

IV. $y_ö=2x^2$ özel çözümüdür

A) II-III

B) I-III

C) III-IV

D) I-II-III

E) II-III-IV

Cevap D- Denklem 2. mertebeden olduğu için iki lineer bağımsız çözümü olmalı, homojen olmayan denklem olduğu için de özel çözümü olmalıdır. $y_ö=\dfrac{x^3}{3} için\ y_ö'=x^2,\ y_ö''=2x$ olup denklemde yazılırsa $x^2=x^2$ sağlanır. $y'=u \Rightarrow y''=u'$ olup denklemde yazılırsalar $xu'-u=x^2$ 1. mertebeden denklemi elde edilir. Verilen denklemin her iki tarafı x ile çarpılırsa Cauchy Euler denklemi olup $x=e^t$ dönüşümü ile sabit katsayılı denkleme indirgenir.

5- $2x^2y''+xy'-y=0$ denklemi için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

I. $x_0=0$ adi noktadır

II. İndisel denklemin kökleri $r_1=1,\ r_2=-2$ dır

III. $y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n-\frac{1}{2}}$ bir seri çözümüdür

IV. $y_2(x)=x$ bir çözümüdür

A) III-IV

B) I-II

C) I-III

D) I-III-IV

E) II-IV

Cevap A- Denklem düzenlenirse $p_1(x)=\frac{1}{2x},\ p_2(x)=\frac{-1}{2x^2}$ katsayı fonksiyonları için 0 noktasında sürekli olmadığı için bu nokta adi nokta olmayıp tekil noktadır.

$p_0=\lim_{x\to 0} xp_1(x)=1/2,\ q_0=\lim_{x\to 0} x^2 p_2(x)=-1/2$ sonlu limitleri olduğu için $x_0=0$ düzgün tekil nokta olup $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ Frobenius seri çözümü vardır. İndisel denklem

$r(r-1)+p_0 r+q_0=0 \Rightarrow r(r-1)+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow 2r^2-r-1=0 \Rightarrow r_1=1, r_2=-1/2$ köklerine sahip olur.

Buna göre çözümler $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$ *veya* $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-\frac{1}{2}}$ formlarındadır.

$y=x \Rightarrow y'=1,\ y''=0 \Rightarrow 0-x.1+x=0$ sağlandığı için çözümdür.

6- $\{e^x, e^{2x}, 2e^x\}$ fonksiyonlarının Wronskian değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4

B) 2

C) e

D) 2e

E) 0

Cevap E- Lineer bağımlı fonksiyonlar (aynı veya birbirinin katı olan fonksiyonlar) için $W(x)=0$ olur.

7- $y'''+2y''=2e^{-2x}$ denkleminin $y_ö$ özel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x+e^{-2x}$

B) $2e^{-2x}$

C) $\frac{1}{2}xe^{-2x}$

D) $\frac{1}{4}xe^{-2x}$

E) $\frac{1}{2}e^{-2x}$

Cevap C - Ters operatör yöntemi ile

$$y_ö=\frac{1}{D^3+2D^2}\left(2e^{-2x}\right)=2\frac{1}{D^2(D+2)}e^{-2x}=2\frac{1}{(-2)^2(D+2)}e^{-2x}=\frac{1}{2}e^{2x}\frac{1}{D}1=\frac{1}{2}e^{2x}x$$

bulunur.

8- $y''-\frac{1}{x}y'=\frac{1}{x}$ denklemi için aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) $y_1=1$ homojen kısmın çözümlerinden biridir

B) $y_ö=x$ özel çözümdür

C) $x=e^t$ dönüşümü ile sabit katsayılı denkleme indirgenir

D) $y=c_1+c_2x^2-x$ genel çözümdür

E) Uygun $u=u(x)$ dönüşümü ile $u'=\frac{1}{x}(1+u)$ denklemi elde edilir

Cevap B- $y'=u \Rightarrow y''=u'$ olup denklem $u'-\frac{1}{x}u=\frac{1}{x} \quad \Rightarrow u'=\frac{1}{x}(1+u)$ değişkenlerine ayrılabilir denklem elde edilir. Bunun çözümünden $\frac{du}{1+u}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(1+u)=\ln x+\ln c_1 \Rightarrow u=c_1x-1$ bulunur. $y'=u$ olduğundan buradan bir kez integral alınırsa $y=c_1\frac{x^2}{2}-x+c_2 \Rightarrow y=a+bx^2-x$ genel çözüm formudur. Buna göre $y_1=1, y_2=x^2$ *ve* $y_ö=-x$ şeklindedir. Denklem x^2 ile çarpılırsa Cauchy Euler denklemi olup $x=e^t$ dönüşümü ile sabit katsayılı denkleme indirgenir.

Doç. Dr. Fatma HIRA